Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 6
24.01.2006

Numerische Mathematik 1

26. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = y(x) - x^2 + 2x \qquad \text{für } x > 0, \quad y(0) = 0$$

mit der exakten Lösung $y(x) = x^2$. Man gebe die Rekursionsvorschriften der Heunschen Methode und des Crank-Nicolson-Verfahrens an und verwende diese zur Berechnung der Näherungslösung in $x = 0.2$ mit den Schrittweiten $h_1 = 0.1$ und $h_2 = 0.05$.

27. Betrachtet werde das Anfangswertproblem

$$u'' = f(x, u, u') \qquad \text{für } x > 0, \quad u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_1.$$

Man überführe die Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und leite für diese ein explizites Eulersches Polygonzugverfahren her.
Mit einer Schrittweite von $h = 0.1$ berechne man damit die Näherungslösung in $x = 0.2$ des Anfangswertproblems

$$u'' + u(x) + x = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

28. Ausgehend von

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx$$

konstruiere man ein Mehrschrittverfahren durch quadratische Interpolation des Integranden in den Stützstellen x_{k-1}, x_k und x_{k+1}.

29. Man untersuche die Konsistenzordnung und die Stabilität des Mehrschrittverfahrens von Milne-Simpson,

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{1}{3}h[f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 4f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

30. Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h[(1-\alpha)f(x_k, y_k) + \alpha f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

für das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$ und $y(x_0) = y_0$, sowie $\alpha \in \mathbb{R}$.
Man zeige:
a) Ist die Lösung $y(x)$ zweimal stetig differenzierbar, dann ist das Verfahren konsistent.
b) Das Verfahren ist A-stabil für $\alpha \geq \frac{1}{2}$.