Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Hausarbeit 1
8.11.2005

Numerische Mathematik 1

S1 Eine Verallgemeinerung der in der Vorlesung behandelten Interpolationsaufgabe für Polynome besteht darin, zu $n+1$ Knoten $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ sowie zwei Sätzen von je $n+1$ Werten $\{f_j\}_{j=0}^n$ und $\{f_j'\}_{j=0}^n$ ein Polynom $p \in \Pi_{2n+1}$ zu bestimmen, so dass

$$p(x_j) = f_j, \quad p'(x_j) = f_j' \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n$$

ist. Interpolationsaufgaben, in denen Ableitungswerte vorgeschrieben sind, nennt man Hermite-Interpolation.
Sind $\{L_j\}_{j=0}^n$ die Lagrange-Polynome der Knoten $\{x_j\}_{j=0}^n$, so sind die Polynome $\{H_j\}_{j=0}^n$ sowie $\{K_j\}_{j=0}^n$ folgendermaßen definiert:

$$H_j(x) = [L_j(x)]^2(1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j)),$$

$$K_j(x) = [L_j(x)]^2(x - x_j).$$

a) Man konstruiere mit Hilfe der Hilfspolynome $H_j(x)$ und $K_j(x)$ eine Lösung der o.g. Hermiteschen Interpolationsaufgabe und zeige ihre Eindeutigkeit.

b) Es sei $f(x)$ $2n+2$ mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und $p \in \Pi_{2n+1}$ die Lösung der oben definierten Hermiteschen Interpolationsaufgabe.
Man zeige, dass zu jedem $x \in [a,b]$ ein $\xi(x) \in (a,b)$ existiert, so dass

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \ldots (x - x_n)^2$$

ist.